

# 15 veikla

---

## Turistų miestas. Dominuojančios sekos

### Santrauka

Daugelis realaus gyvenimo situacijų gali būti vaizduojamos abstrakčiai – grafais ar tinklais. Tinklai ir grafai suteikia daug galimybių parašyti naujų naudingų algoritmų. Atliekant šią veiklą siekiama pažymėti susikirtimus arba grafo viršūnes taip, kad kiekviena viršūnė būtų nutolusi ne daugiau kaip per vieną žingsnį nuo kurios nors iš kitų pažymėtų viršūnių. Kiek reikia mažiausiai pažymėti tokių viršūnių?

### Ryšiai su ugdymo programomis

- ✓ Matematika: vieta ir padėtis
- ✓ Matematika: loginiai uždaviniai

### Gebėjimai

- ✓ Žemėlapių skaitymo
- ✓ Ryšių nustatymo
- ✓ Dėlionės sprendimo
- ✓ Pasikartojančio tikslo siekimo

### Amžius

- ✓ Nuo 7 metų

### Priemonės

Kiekvienai mokinių grupei reikės:

- ✓ Darbo lapo „Ledų furgonas“
- ✓ Dviejų spalvų žymiklių ar spalvotų smeigtukų

Reikės:

- ✓ Projektoriaus ir baltos lentos, kad būtų galima demonstruoti medžiagą, arba tik baltos lentos, kurioje būtų galima paaiškinti medžiagą visai grupei.



# Dominuojančios sekos

---

## Įvadas

„Ledų furgono“ darbo lape grafu vaizduojamas Turistų miesto žemėlapis. Briaunos arba lankai jame vaizduoja gatves, o viršūnės yra gatvių sankryžos. Miestas yra labai karštoje šalyje. Vasarą ledų furgonai pastatomi prie gatvių sankryžų, čia parduodami ledai turistams. Furgonai turi būti sustatyti taip, kad bet kas, gyvenantis prie gatvės, pasiektų furgoną vos tik paėjęs iki gatvės kampo, o gyvenantis name prie gatvių sankryžos pasiektų furgoną paėjęs daugiausiai vieną kvartalą. Kiek mažiausiai furgonų reikia ir kuriose vietose jie turi būti pastatyti?

## Diskusija ir veiklos

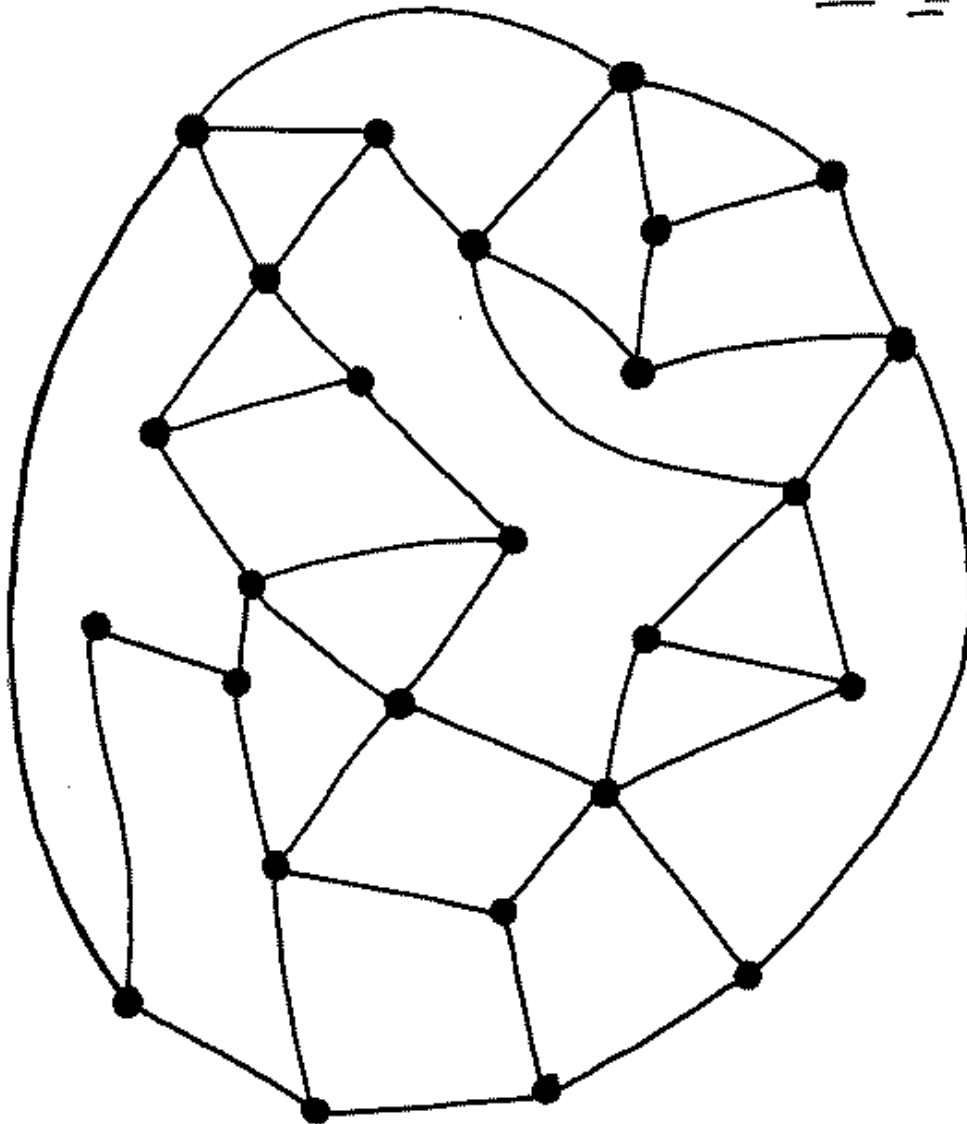
3. Mokiniai pasiskirsto mažomis grupėmis. Kiekvienai grupei duodamas Turistų miesto žemėlapis ir keletas žymiklių. Paaiškinama užduotis.
4. Mokiniam paaiškinama, kaip pažymėti sankryžą, kur statomas ledų furgonas. Kitos spalvos žymikliu pažymimos sankryžos per vieną gatvę nuo furgono. Ledų furgonas skirtas žmonėms, gyvenantiems prie tų sankryžų ar gatvėse, kurios susikerta tose pažymėtose sankryžose.
5. Mokiniai eksperimentuodami žymi skirtingas ledų furgonų vietas. Kai mokiniai sudėlioja furgonus taip, kad jų vieta patogi visiems gyventojams, primenama, kad furgonai yra brangūs, todėl jų turi būti kuo mažiau. Akivaizdu, užduoties sąlygos tenkinamos, kai kiekvienoje sankryžoje pastatoma po furgoną, bet įdomesnis klausimas yra, kiek furgonų galima pašalinti, kad likusių vis tiek užtektų visiems gyventojams.
6. Šešių furgonų pakanka visiems Turistų miesto gyventojams. Sprendimas parodytas paveiksle dešinėje, tačiau šį sprendimą labai sunku surasti! Jei mokiniams sunku surasti mažiausią furgonų skaičių, palaukus kiek laiko galima jiems tą skaičių pasakyti ir paprašyti furgonus pažymėti grafe. Tačiau ir tai gali būti gana sunku. Mokiniam nelengva surasti net ir sprendimą su aštuoniais ar devyniais furgonais.
7. Galima paaiškinti mokiniams, kaip braižomas toks žemėlapis (žr. šios veiklos sprendimus ir užuominas). Mokiniai gali pabandyti sukurti savo Turistų miestą parodytu metodu. Vieniems gali būti įdomu sukurti lengvai išsprendžiamą dėlionę, o kitiems ir tai gali būti labai sunku. Šis pavyzdys vadinamas *vienos krypties funkcija*: lengva pasiūlyti sunkiai sprendžiamą dėlionę, kai žinomas jos kūrimo nuo sprendinio metodas. Vienos krypties funkcijos yra kriptografijos pagrindas (17 ir 18 veiklos).



## Darbo lapas *Ledų furgonai*

---

Pažymėkite, kuriose sankryžose turėtų stovėti ledų furgonai, kad būtų patogu visiems Tūristų miesto gyventojams.



## Gudručiams

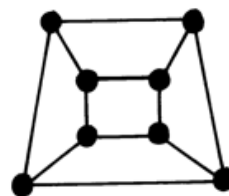
Realiam gyvenime „Ledų furgonų“ uždavinys pasitaiko gana dažnai, kai reikia nustatyti pašto punktų, gaisrinių ir kitų reikalingų objektų vietas, kad būtų galima greitai aptarnauti visus gyventojus. Tačiau realiam gyvenime negalima pasinaudoti gudrybe, aprašyta šios veiklos skyriuje, ir lengvai išspręsti problemą. Ką daryti?

Galima pasitelkti visiškai nesudėtingą būdą: perrinkti visus įmanomus ledų furgono pastatymo variantus ir išrinkti geriausią. Kadangi Turistų mieste yra 26 gatvių sankryžos, tai yra 26 vietos ledų furgonui pastatyti. Nesudėtinga patikrinti visas 26 galimybes. Akivaizdu, kad nė viena iš jų netenkina uždavinio sąlygų. Dviem ledų furgonams pastatyti turime  $26 \times 25 = 650$  galimybių, nes, aišku, du furgonai nebus statomi vienoje vietoje. Patikrinti kiekvieną galimybę atskirai nėra sunku, bet patikrinti visas – varginantis ir nuobodus darbas. Be to, užtektų patikrinti pusę galimybių (325), nes nesvarbu, kuris furgonas pastatomas sankryžoje: jei patikrinamas 1 furgonas A sankryžoje, o 2 furgonas B sankryžoje, tai nebereikia tikrinti 2 furgono A sankryžoje ir 1 furgono B sankryžoje. Pastatyti tris furgonus būtų 2600 galimybių, keturis – 14950 galimybių ir t. t. Aišku, 26 furgonų tikrai pakaktų, nes yra tik 26 sankryžos ir nėra prasmės statyti po du furgonus vienoje sankryžoje.

Kitas ledų furgonų vietų nustatymo būdas – suskaičiuoti visas įmanomas galimybes, kai sankryžos yra 26, o furgonų skaičius bet koks. Kadangi kiekvienai sankryžai yra tik dvi galimybės (yra pastatytas furgonas arba jo nėra), tai galimybių skaičius yra  $2^{26} = 67108864$ . Šis sprendimo metodas vadinamas *visiško perrinkimo algoritmu* ir užima daug laiko. Nors atrodo, kad kompiuteriai yra gana spartūs ir gali atlikti šią užduotį gana greitai, iš tikrųjų net ir spartus kompiuteris ilgai ieško sprendinio. Visiško perrinkimo algoritmo atlikimo sparta priklauso nuo to, kaip greitai patikrinama, ar galimybė yra uždavinio sprendinys, t. y. tenkina visas sąlygas. Įdomu, kiek laiko galėtų sugaišti kompiuteris tikrindamas visas  $2^{26}$  galimybių. Jei patikrinti vieną galimybę, ar ji yra sprendinys, užtruktų 1 s, tai patikrinti visas galimybes būtų sugaišta apie 67 mln. sekundžių, arba apie 777 dienų, arba dvejus metus. Net jei viena galimybė būtų tikrinama tik 0,001 s, tai per tuos dvejus metus kompiuteris galėtų patikrinti tik  $2^{36}$  galimybių. Jei kompiuteris būtų milijoną kartų spartesnis ir milijoną galimybių patikrintų per 1 s, tai per dvejus metus patikrintų miestą tik su 46 sankryžomis. O tai tikrai nedidelis miestelis. Kiek sankryžų yra jūsų mieste?

Jei visiško perrinkimo algoritmas toks lėtas, gal yra koks kitas šio uždavinio sprendimo būdas? Galima pabandyti taikyti „godumo“ principą. Pirmasis ledų furgonas statomas sankryžoje, kurioje susikerta daugiausia gatvių, antrasis – kitoje sankryžoje, kurioje vėl susikerta daugiausia gatvių ir t. t. Tačiau šio metodo rezultatas nebūtinai bus mažiausias furgonų skaičius, nes sankryža su didžiausiu gatvių skaičiumi gali būti ir ne pati geriausia vieta furgonui pastatyti pagal uždavinio sąlygas. Tai galima patikrinti kartu su mokiniais.

Aiškintis galima pradėti nuo paprastesnės užduoties. Mokiniais pasakomas furgonų skaičius ir pasiūloma išsiaiškinti, ar jis yra mažiausias. Kai kuriais atvejais tai visai nesunku. Pavyzdžiui, grafe dešinėje vaizduojamas daug paprastesnis miestas. Jei gatvės įsivaizduojamos kaip kubo



briaunos, akivaizdu, kad du ledų furgonai gali būti pastatyti priešinguose kubo įstrižainės galuose. Be to, būtų galima įsitikinti, kad vieno ledų furgono tikrai nepakanka šiame mieste. Taip pat galima pabandyti įsitikinti, kad ir Turistų mieste negali būti mažiau kaip 6 furgonai.



## Apie ką visa tai?

---

Įdomu tai, kad kol kas nėra kito „Ledų furgonų“ uždavinio sprendimo metodo nei visiškas perrinkimas. Visiško perrinkimo algoritmo atlikimo laikas ilgėja eksponentiškai didėjant sankryžų skaičiui. Toks algoritmas vadinamas *eksponentinio laiko algoritmu*. Informatikoje žinomas ir *polinominio laiko* sprendimo algoritmas, kurio laikas ilgėja sankryžų skaičiaus laipsniais (kvadratu, trečiuoju ir t. t.). Toks algoritmas yra greitesnis nei eksponentinis algoritmas, kai reikia sudaryti didelius žemėlapius. Pavyzdžiui, kai viršūnių skaičius  $n$  yra didesnis už 117, tai  $n^{17}$  yra mažesnis už  $2^n$ . Ar yra polinominio laiko algoritmas „Ledų furgonų“ uždaviniui spręsti? Dar nėra, nors informatikai stengiasi jį sukurti. Lengvesnis uždavinys, kai reikia patikrinti, ar tam tikras furgonų skaičius yra mažiausias, taip pat sprendžiama visiško perrinkimo algoritmu. *Polinominio laiko* algoritmas šiam uždaviniui spręsti dar nėra sukurtas.

Ar šis uždavinys neprimena žemėlapių spalvinimo (13 veikla)? Turėtų! „Ledų furgonų“ uždavinys priklauso vadinamajai *minimalios dominuojančios sekos* (angl. *minimum dominating set*) uždavinių grupei, kurią sudaro tūkstančiai uždavinių, pavyzdžiui, žemėlapių spalvinimas, optimalaus maršruto paieška, tvarkaraščio sudarymas ir kt. Dar nėra žinoma, ar galima sukurti *polinominio laiko* algoritmus visiems šiems uždaviniams. Jei būtų sukurtas *polinominio laiko* algoritmas bent vienam iš šių uždavinių spręsti, jis galėtų būti pritaikytas ir visiems likusiems šio tipo uždaviniams.

Šie uždaviniai vadinami *NP pilnumo* uždaviniais. NP yra termino *nedeterministinis polinomas* santrumpa. Tai reiškia, kad uždavinys galėtų būti išspręstas per priimtina laiką, jei kompiuteris iškart galėtų apdoroti gana daug sprendinių (tai ir yra nedeterministinė dalis). Deja, neįmanoma sukurti tokio kompiuterio, nes jis turėtų būti labai didelis. Tačiau tokio kompiuterio konceptas yra iš esmės svarbus, nes NP pilnumo uždaviniai negali būti išspręsti per priimtina laiką neturint nedeterministinio kompiuterio.

Šie uždaviniai vadinami *pilnumo*, nes rastą vieno uždavinio sprendimą būtų galima pritaikyti ir kitiems tokiems uždaviniams, nors patys uždaviniai atrodo labai skirtingi: žemėlapių spalvinimas skiriasi nuo ledų furgonų statymo ir t. t. Šie uždaviniai visi kartu gali būti išspręsti arba ne.

### Daugiau informacijos

Davidas Harelas knygoje „*Algorithmics*“ pateikia keletą NP pilnumo uždavinių ir samprotauja, ar polinominio laiko algoritmas jiems spręsti egzistuoja. (The Spirit of Computing, Addison–Wesley, Reading, MA, 2nd edition, 1992. 3rd edition, 2004 (with Y. Feldman)).

Alexanderis K. Dewdney knygoje „*Turing Omnibus*“ taip pat aptaria NP pilnumą. (Press, New York, 1989).

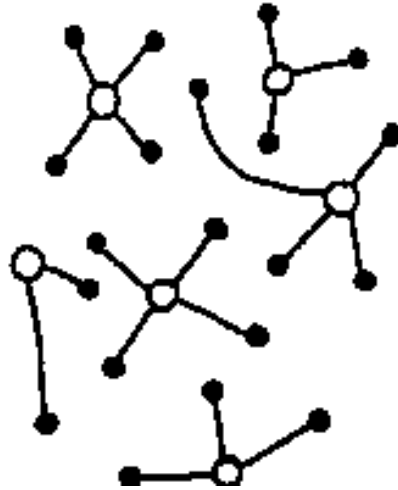
Michaelas R. Garey ir Davidas S. Johnsonas knygoje „*Computers and Intractability: A guide to the theory of NP–completeness*“ nagrinėja kelis šimtus NP pilnumo uždavinių ir NP pilnumo įrodymo metodų. (W. H. Freeman and co., New York, 1979).



## Sprendimai ir užuominos

---

Turistų miesto žemėlapis pradedamas braižyti nuo šešių viršūnių, kur turėtų stovėti po vieną ledų furgoną. Iš kiekvienos viršūnės brėžiamos gatvės, jų gale pažymimos viršūnės, kaip parodyta paveiksle žemiau.



Laisvos viršūnės sujungiamos briaunomis arba lankais, kaip parodyta paveiksle žemiau.

